UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO
CHILE

ELEMER NEMESSZEGHY

IDENTIDAD EN LA LOGICA MATEMATICA

PUBLICACIONES UCV

COLECCION CUADERNOS

JUNIO 1967

DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

Director: Iván Droguett

ELEMER NEMESSZEGHY

IDENTIDAD EN LA LOGICA MATEMATICA

UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO — CHILE

JUNIO 1967

LOGICA MATEMATICA

IDENTIDAD EN LA

[illegible]

INDICE GENERAL

Pág.

Prólogo 7
Introducción. Sistemas formales 9

Sintaxis de un sistema formal 9
Las definiciones en el sistema formal 10
La teoría deductiva del sistema 10
Consistencia de los axiomas 13
Independencia de los axiomas 13
Completitud del sistema de axiomas 14

Capítulo Primero: Lógica 15

Introducción 15
Símbolos elementales 15
Expresiones elementales 16
Conectivos 16
Expresiones bien formadas 16
Cuantificadores 16
Regla de formación con cuantificadores 16
Reglas de formación de expresiones por substituciones 17
Símbolos ligados y libres 18
Confusión de símbolos 18
Símbolos metalógicos 18
Axiomas 19
Reglas de deducción 20
Reglas de substitución para expresiones aceptadas 21

Regla de reemplazo 22
Definiciones 23
Una interpretación posible 23
Algunos teoremas 24
Interpretación metalógica 26
Lista de teoremas que se usarán 28

Capítulo Segundo: Identidad 31

Nueva regla de substitución 32
Una interpretación 32
Teoremas 32

Capítulo Tercero: Expresiones adverbiales de cantidad 39

Definiciones previas 39
Validez de una expresión bien formada 40
Expresiones adverbiales con "a lo más" 41
Metateorema 42
Expresiones adverbiales con "a lo menos" 43
Metateorema 3 44
Metateorema 4 44
Interpretación vectorial de las expresiones de cantidad 45
Expresiones adverbiales de cantidad con predicado 47
Metateorema 49
Un método de decisión no algorítmico para el cálculo de proposiciones 49
Descripción de objetos singulares 51

Bibliografía 53

PROLOGO

A la pregunta: ¿Qué es la Matemática?, bien podría contestarse: Matemática es probar. Y probar consiste en pasar de asertos iniciales a otros asertos. El paso de los unos a los otros debe hacerse siguiendo reglas bien precisas. El conjunto de estas reglas constituye lo que se ha llamado: LOGICA. Sin Lógica no hay prueba, sin prueba no hay Matemática.

Dramatizada la situación en esta forma se comprende la íntima relación que existe entre la Lógica y la Matemática. Tanto es así que para muchos la Matemática es una extensión de la Lógica, mientras que para otros la Lógica es un capítulo de la Matemática.

La Matemática en su continua búsqueda de mayor concisión y claridad da cada día más importancia al estudio de la Lógica como uno de los requisitos fundamentales para una mayor comprensión de su propia estructura.

Así como mediante el estudio de la Lógica se aclara el edificio matemático, sucedió también que la Lógica se "contaminó" con los modos de pensar y los métodos de la Matemática y se liberó de los problemas filosóficos y metafísicos que se creían inherentes a la Lógica, logrando una claridad antes desconocida.

Esta nueva Lógica, la única que interesa a los científicos, se llama a veces Lógica Matemática para distinguirla de esa brumosa disciplina que los filósofos llaman Lógica.

El presente trabajo, debido a su modernidad, a su alto nivel técnico, es una contribución valiosísima a la Literatura Científi-

fica Castellana. Aún más, me atrevería a decir que es un caso único en lo que respecta a dar un tratamiento matemático de la Lógica de acuerdo al estado actual de esta disciplina.

El autor, un especialista en la materia, nos enfrenta en la primera parte de su trabajo, a una presentación en extremo atractiva de los elementos lógicos imprescindibles para todo estudio de la Ciencia; nada hay de brumoso o extra-científico allí.

En la segunda parte del trabajo el Dr. Nemesszeghy nos da a conocer algunas investigaciones originales, altamente interesantes, consecuencias de las iniciadas por él hace algunos años en la Universidad de Lovaina.

Es nuestro ferviente deseo que a esta publicación sigan otras.

SANTIAGO – CHILE
Junio – 1967

Dr. Jaime Michelow
Prof. de Mat. U. T. E.

INTRODUCCION

SISTEMAS FORMALES

Definiremos la noción de sistema formal, que se usará en el resto de esta obra.

Para el estudio de un sistema formal distinguiremos dos partes:

- La sintaxis del sistema que trata de la coordinación de los símbolos usados.
- La teoría deductiva del sistema, que trata de los axiomas y teoremas y de sus relaciones entre ellos.

SINTAXIS DE UN SISTEMA FORMAL

Para presentar un sistema formal, como cualquier sistema científico, es necesario usar símbolos para nombrar los objetos elementales del sistema. (La elección de los símbolos no es esencial y dos presentaciones de un sistema formal diferentes tan sólo en la elección del simbolismo, se dirá que son presentaciones del mismo sistema formal).

Los símbolos dados en primer lugar se llamarán *Símbolos elementales*. De ellos no nos interesa ni su significado ni la naturaleza de los objetos nombrados.

Con los símbolos elementales formaremos expresiones. Una *expresión* es una secuencia de símbolos elementales. (En nuestro uso occidental, podemos acordar escribir los símbolos desde la izquierda hacia la derecha).

Ejemplos: 1.– Sean a, b, c, nuestros símbolos elementales, entonces a, ab, abb, cab, cc, cabbac serían expresiones.

2.– Sean a, b, c, +, =, nuestros símbolos elementales, entonces a, ab, ac, a+, a+b, a=b, = – +, serían expresiones.

En esta forma podemos generar una clase infinita de expresiones del sistema.

Sin embargo, consideraremos que no todas estas expresiones son interesantes. (En el ejemplo 2: en álgebra no interesan expresiones del tipo 'a = +'' = = +').

Llamaremos a los expresiones interesantes *Expresiones bien Formadas.*

¿Cómo reconocer las expresiones bien formadas? Una vez enunciadas explícitamente las reglas de formación de e. b. f., podremos comparar una expresión con las reglas de formación y así se podrá ver si se trata de una e. b. f, o no.

En general, se dan reglas recursivas de formación de expresiones bien formadas. (Si *esto* es una expresión bien formada, entonces *aquello* es una expresión bien formada).

LAS DEFINICIONES EN EL SISTEMA FORMAL

Junto a los símbolos elementales, es posible algunas veces introducir otros símbolos. Estos símbolos se introducen por definición, que consiste básicamente en definir como bien formada una expresión que no lo era, o dar otra forma generalmente más abreviada a expresiones de uso frecuente.

LA TEORIA DEDUCTIVA DEL SISTEMA

Para Euclides y muchos otros, los axiomas tienen que ser evidentes, y esto justificaría su elección de tales. Este criterio no es

útil, sin embargo, en nuestra investigación, porque: ¿es un criterio objetivo? Ciertamente no, la evidencia de ciertos enunciados es subjetiva; aún más, sobre proposiciones 'no evidentes' se ha construido sistemas científicos totalmente lógicos (Geometría de Lobachevski). Por lo tanto, debemos escoger otro criterio, ¿cuál?

Nuestro criterio será convencional, o sea, nosotros podríamos escoger entre las expresiones significativas aquellas que nos interesan para ser teoremas o expresiones válidas del sistema. Se podría proceder de las siguientes maneras:

Primero: Señalar todos los teoremas deseados desde un comienzo (posible, pero no práctico).

Segundo: Señalar algunos de los teoremas deseados al comienzo y dar reglas de deducción, para que a partir de los teoremas escogidos inicialmente se pueda 'deducir' el resto usando las reglas. Esta será nuestra forma de operar.

Entre todas las expresiones significativas, escogemos algunas, en forma convencional, y las declaramos aceptadas o escogidas en el sistema. Usando el lenguaje clásico, escogemos *arbitrariamente* nuestros *axiomas*. Para expresar que una expresión es axioma prefijamos el símbolo ' $\vdash$ '.

La sorpresa y la consternación producida por la arbitrariedad en la elección de los axiomas es explicable, pero remediable.

Además de los axiomas es posible dar reglas de deducción, esto es instrucciones para formar nuevas expresiones que sean consideradas escogidas. Estas nuevas expresiones escogidas son los teoremas del sistema. Un teorema una vez demostrado, esto es, una vez que se ha indicado un proceso a partir de los axiomas y usando las reglas de deducción para aceptar el teorema, tiene el mismo carácter de los axiomas. (Esto es, a partir de un teorema demostrado pueden demostrarse nuevos teoremas).

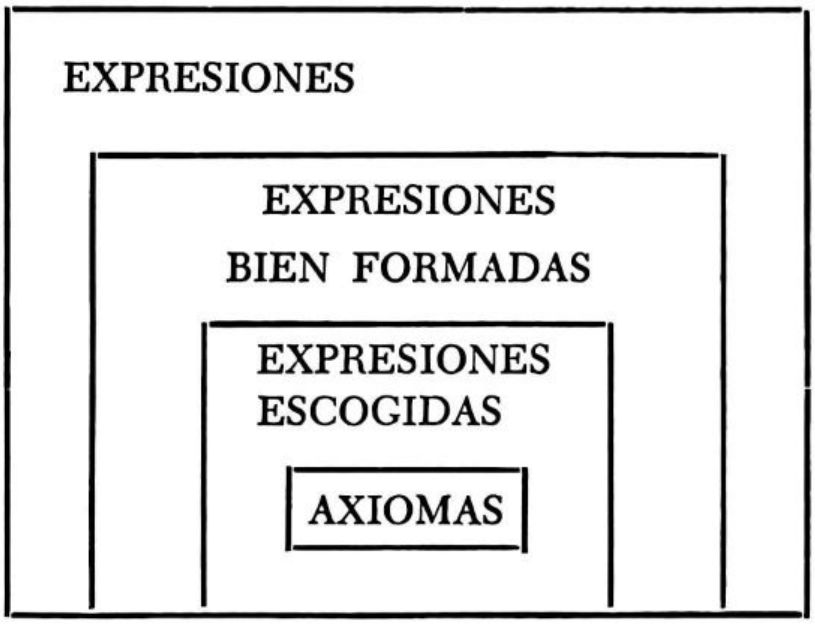
Llamaremos sistema formal, al sistema en el cual se han enunciado y definido explícitamente:

a) Los símbolos elementales

b) Las reglas de formación de expresiones bien formadas

c) Los axiomas; y

d) las reglas de deducción.



Ejemplos: a) Símbolos elementales : a, b c.

b) Reglas de formación.
RF 1 : 'a' es una expresión bien formada.
RF 2 : Si se tiene una expresión bien formada y se escriben atrás una b, la expresión resultante es bien formada (ab, abb,. .).
RF 3 : Si se tiene dos expresiones bien formadas, y se escribe entre ellas una c, la expresión resultante es bien formada (aca, abca, abbcab. . .).

c) Axiomas:

$$\mathbf{Ax} \quad \vdash \; a \; c \; a$$

d) Reglas de deducción:

Sean N expresiones bien formadas, entonces si M c N es una expresión escogida entonces M b c N b será también escogida.
Esto se simboliza en la manera siguiente:

$$\text{R D} \quad \frac{\vdash \text{M c N}}{\vdash \text{M b c N b}}$$

Teorema 1: a b c a b

Demostración: Por el axioma se tiene que a c a, luego, recordando que 'a' es una expresión bien formada (RF 1), y aplicando RD se tiene que a b c a b.

Más breve: $\text{R D} \quad \dfrac{\text{Ax} \vdash \text{a c a}}{\vdash \text{a b c a b}}$

Otros teoremas: T 2 ⊢ a b b c a b b
T 3 ⊢ a b b b c a b b b ..., etc.

CONSISTENCIA DE LOS AXIOMAS

Si la elección de los axiomas es tal que cualquier expresión bien formada resulta ser un teorema, el sistema es no interesante y es declarado inconsistente. (La existencia de contradicciones es suficiente para garantizar la inconsistencia del sistema).

La demostración de la consistencia del sistema la veremos más adelante.

INDEPENDENCIA DE LOS AXIOMAS

Los axiomas son independientes, si la exclusión de alguno de ellos afecta a la clase de expresiones escogidas, en el sentido que

hay expresiones anteriormente escogidas que ahora no pueden demostrarse, en particular el axioma excluido. La independencia de los axiomas es más bien una exigencia de elegancia, y en la práctica el uso de sistemas de axiomas redundantes, puede conducir a una facilidad del trabajo.

COMPLETITUD DEL SISTEMA DE AXIOMAS

Un sistema es completo, si al agregar un axioma independiente conduce a una inconsistencia del sistema. Esto implica que cualquier expresión aceptable interesante del sistema puede construirse a partir de un sistema completo de axiomas.

Capítulo primero

LOGICA

INTRODUCCION

En la lógica simbólica se usa algún lenguaje corriente para poder construir un lenguaje más sistemático.

En el presente trabajo usaremos el castellano como lenguaje corriente, para la construcción del lenguaje sistemático.

SIMBOLOS ELEMENTALES

Consideremos tres tipos de símbolos elementales que escribiremos en una misma fila para poder referirlos después como los símbolos elementales de fila número tanto. Estos símbolos son los siguientes:

I) Fila 1º : p, q, m, n, r, s.
II) Fila 2º : a, b, c, d, e, f.
III) Fila 3º : x, y, z, v, w, t.

Observación:

Si estos símbolos no son suficientes usaremos subíndices como p_1, p_2, a_1, a_2, x_2, etc.

EXPRESIONES ELEMENTALES

1) Cada uno de los símbolos de la primera fila es una expresión elemental.

2) Los símbolos de la segunda y de la tercera fila solos no son expresiones.

3) Para formar una expresión elemental con los símbolos de la segunda y de la tercera fila se toma uno y solo uno de la segunda y uno o más de la tercera fila. (Escritas de izquierda a derecha y con el orden de precedencia indicado).

Así ax, axy, bxyz, son expresiones elementales.

CONECTIVOS

Los símbolos N, C, K, A, E les llamaremos conectivos.

EXPRESIONES BIEN FORMADAS

Reglas de formación de expresiones bien formadas:

1) Las expresiones elementales son expresiones bien formadas.
2) Poniendo 'N' delante de una expresión bien formada, se forma otra expresión bien formada. Por Ej.: Np, NNp, Nax.
3) Poniendo C, K, A, E, delante de dos expresiones bien formadas se forma una expresión bien formada. Por Ej.: C K p q m C A p N q.

CUANTIFICADORES

Los símbolos π y Σ se llaman cuantificadores. π se llama cuantificador universal, Σ se llama cuantificador particular o existencial.

REGLA DE FORMACION CON CUANTIFICADORES

Se obtiene una expresión bien formada con cuantificadores, si se escribe (de izquierda a derecha):

primero: π o Σ.
segundo: uno y sólo uno de los símbolos elementales de la fila 3.
tercero: una expresión bien formada cualquiera.
Ejs.: π x p, π x a x, π x Σ y C p a z son expresiones bien formadas.

Observación:

La expresión bien formada que se escribe en tercer lugar se llama alcance del cuantificador.

REGLAS DE FORMACION DE EXPRESIONES POR SUBSTITUCIONES

RS 1.—Si en una expresión bien formada aparece un símbolo de la primera fila; la expresión que resulta al *reemplazar* en *todas* sus *ocurrencias* este símbolo por *otra* expresión bien formada *cualquiera,* es bien formada.

Ej.: C A p N q p p/ C A K p N r N q K p N r.
K p N r

***RS* 2.—Si en una expresión bien formada aparece un símbolo de la segunda fila; la expresión que resulta al reemplazar en todas sus ocurrencias dicho símbolo por *otro,* de la *misma fila,* es bien formada.**

Ej.: K C π x a x p a y a/b K C π x b x p b y.

RS 3.—Si en una expresión bien formada aparece un símbolo de la tercera fila; la expresión que resulta al reemplazar en todas sus ocurrencias este símbolo por *otro* de la *misma fila,* es bien formada.

Ej.: C π y A b y N b y b x y/Z C π z A b Z N b z b x.

SIMBOLOS LIGADOS Y LIBRES

En una expresión bien formada se dice que un símbolo elemental de la tercera fila es ligado por un cuantificador si sigue al cuantificador y se repite en el alcance del mismo.

Un símbolo no ligado se llama símbolo libre. Así en las expresiones siguientes x es libre e y es ligado: π y a x y; / π y C a x a y /.

CONFUSION DE SIMBOLOS

Se dice que hay una confusión de símbolos cuando al efectuar substituciones disminuye el número de símbolos libres.

Ej.: 1.— C π x a x a $\overset{y}{y}$ / C π x a x a $\overset{x}{x}$, se produce una confusión de símbolos, pues la segunda expresión tiene un símbolo libre menos.

2.— x K a x a $\overset{x}{y}$ / y K a y a $\overset{y}{y}$

3.— A a x b $\overset{y}{y}$ / A a x b $\overset{x}{x}$. En este caso "no hay confusión". ¡Hay dos símbolos libres iguales!

SIMBOLOS METALOGICOS

Introduciremos nuevos símbolos que suelen llamarse símbolos metalógicos porque no son símbolos del lenguaje lógico, sino que hablan del lenguaje lógico.

Usaremos los siguientes símbolos metalógicos:

"$\vdash$" este símbolo antes de una expresión bien formada significa que la expresión que lo sigue es una expresión aceptada. Las expresiones aceptadas se llaman también axiomas o teoremas.

P, Q, R, S, son también símbolos metalógicos y cada uno significa lo siguiente: considérese una expresión bien formada cualquiera.
$\vdash$ P significa: considérese cualquier expresión aceptada.
$\vdash$ P $\vdash$ Q quiere decir: considérese dos expresiones cualquiera aceptadas.

$$\frac{\vdash P \qquad \vdash Q \ldots}{\vdash R}$$

significa, teniendo aceptadas las expresiones $\vdash$ P, $\vdash$ Q, , . . . se acepta $\vdash$ R.

Introduciremos nuevos símbolos metalógicos en la forma siguiente:

Se escribe una B, o D delante de un símbolo de la tercera fila.

Ej.: Bx, Dy, . . . etc.

Significa, considérese cualquier expresión en que el símbolo de la tercera fila es libre.

Así, Bx significa, considérese cualquier expresión bien formada, tal que contenga x como símbolo libre.

Ejs.:

$\vdash \pi$ x B x significa: considérese una expresión aceptada en la cual x está ligada por un cuantificador universal.

$\vdash \Sigma$ x B x significa: lo mismo que antes, con la diferencia que aquí x está ligada por un cuantificador particular.

AXIOMAS

Las reglas de formación de expresiones nos permiten formar un número infinito de expresiones.

Nosotros vamos a aceptar algunas expresiones bien formadas (en número finito) y también daremos reglas o instrucciones para obtener otras expresiones aceptadas partiendo de expresiones an-

teriormente aceptadas. Nosotros estamos libres en la elección de las expresiones y también en las formaciones de las reglas, pero queremos hacerlo de tal manera que quede por lo menos una expresión bien formada no aceptada.

A las expresiones aceptadas las llamaremos axiomas. *

Propondremos los siguientes axiomas:

Ax 1.– $\vdash$ C A ppp
Ax 2.– $\vdash$ C p A p q
Ax 3.– $\vdash$ C A p q A q p
Ax 4.– $\vdash$ C C p q C A m p A m q
Ax 5.– $\vdash$ C π x a x y
Ax 6.– $\vdash$ C a y Σ x a x

REGLAS DE DEDUCCION

Aceptaremos las siguientes reglas de deducción:

R1 :
$$\frac{\vdash P \qquad \vdash C\ P\ Q}{\vdash Q}$$

R2 :
$$\frac{\vdash C\ P\ Q \qquad \vdash C\ Q\ M}{\vdash C\ P\ M}$$

R'2 :
$$\frac{\vdash C\ P\ Q \qquad \vdash C\ Q\ P}{\vdash E\ P\ Q}$$

R3 :
$$\frac{\vdash B\ x}{\vdash \pi\ x\ B\ x}$$

R'3
$$\frac{\vdash \pi\ x\ B\ x}{\vdash B\ x}$$

* Estos axiomas son equivalentes a los axiomas de Hilbert - W. Ackermann : Grandzüge der Theoretischen logik.

R4 : $\dfrac{\vdash C\ P\ B\ x}{\vdash C\ P\ \pi\ x\ B\ x}$ Con la condición que P no contiene "x" como símbolo libre.

R5 : $\dfrac{\vdash C\ B\ x\ P}{\vdash C\ \Sigma\ x\ B\ x\ P}$ Con la condición que P no contiene "x" como símbolo libre.

R6 : $\dfrac{\vdash C\ B\ x\ D\ x}{\vdash C\ \pi\ x\ B\ x\ \pi\ x\ D\ x}$

R7 : Un axioma o teorema de la forma $\vdash C\ P\ Q$, puede ser formulado también como la siguiente regla de deducción:

$$\frac{\vdash P}{\vdash Q}$$

Obs.: Las reglas enunciadas son redundantes, esto es, con un número menor de ellas podríamos obtener todos los teoremas del sistema. Esto no constituye sin embargo un error, sino más bien una falta de elegancia.

REGLAS DE SUBSTITUCION PARA EXPRESIONES ACEPTADAS

RS A1.— Sea P una expresión, y Q una expresión que se obtiene de P según la RS 1 : $\dfrac{\vdash P}{\vdash Q}$

RSA 2.— Sea P una expresión y Q una expresión que se obtiene de P según la RS 2 : $\dfrac{\vdash P}{\vdash Q}$

RSA 3.— Sea P una expresión y Q una expresión que se obtiene de P según la RS 3, y siempre que no se presente confusión de símbolos :

$$\frac{\vdash P}{\vdash Q}$$

Ejemplos:

1.—
$$\frac{\vdash C\ p\ A\ p\ q}{\vdash C\ p\ A\ p\ p} \quad q/p$$

2.—
$$\frac{\vdash C\ \pi\ x\ a\ x\ a\ y}{\vdash C\ \pi\ x\ b\ x\ b\ y} \quad a/b$$

3.—
$$\frac{\vdash C\ \Sigma\ x\ a\ x\ a\ y}{\vdash C\ \Sigma\ z\ a\ z\ a\ y} \quad x/z \qquad \text{"Nunca } x/y\text{"}$$

Observación:

Las reglas de substitución son válidas con la condición que la substitución tiene que ser aceptada en toda la expresión.

Ahora vamos a dar otra regla semejante a las reglas de substituciones, pero que difiere de las anteriores por no requerirse la condición antes mencionada.

REGLA DE REEMPLAZO °

RR: Si $\vdash$ E P Q entonces P puede ser reemplazado, en una expresión aceptada, por Q sin que sea necesario reemplazarlo en todas sus ocurrencias.
Así por Ej.: sabiendo que $\vdash$ E | P | | A P K p q | entonces en la expresión $\vdash$ C p A p q | p | puede ser reemplazado por | A p K p q | en la expresión: $\vdash$ C p A p q de las maneras siguientes:

° La regla RR se aplica también en el caso de igualdad por definición.

a) $\vdash$ C A p K p q A p q

b) $\vdash$ C p A A p K p q q

c) $\vdash$ C A p K p q A A p K p q q.

En el caso de substitución únicamente el último reemplazo era aceptable.

DEFINICIONES

El símbolo $\doteq$ significa que las dos expresiones bien formadas en ambos lados de $\doteq$ son dos maneras diferentes de escribir lo mismo.

D1 : C p q $\doteq$ A N p q

D2 : K p q $\doteq$ N A N p N q

D3 : E p q $\doteq$ K C p q C q p

UNA INTERPRETACION POSIBLE

Pueden interpretarse los símbolos como conjuntos de palabras de un idioma, como por ejemplo el castellano.

Las expresiones elementales serían en este caso proposiciones, o sea, afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas.

Los símbolos elementales de la segunda fila serían predicados y los de la tercera fila sujetos indeterminados. Así ax puede ser interpretado como "x es a".

Los conectivos serían interpretados de la manera siguiente:

N p	será	no p
K p q	"	p y q
A p q	"	p ó q
C p q	"	si p entonces q
a x	"	x es a
π x a x	"	para todo x, x es a
Σ x a x	"	existe por lo menos un x, tal que x es a.

"Insistimos que es una interpretación posible y no la única".

ALGUNOS TEOREMAS

Vamos a demostrar teoremas que necesitaremos después. Tendremos dos columnas: en una columna analizaremos las reglas y teoremas que intervienen en la demostración, en la otra el resultado de las aplicaciones de las reglas.

Teorema A: $\vdash$ A N p p

Demostración

Partimos del Ax 2

$\vdash$ C p A p q

q/p Ax 2; RSA 1

1 $\vdash$ C p A p p

Ax 1

$\vdash$ C A p p p

R 2, 1, Ax 1,

2 $\vdash$ C p p

D 1; RR, 2.

$\vdash$ A N p p

Explicación:

Se parte del axioma 2

$\vdash$ C p A p q

Sustituimos q por p en el ax. 2, y aplicamos la RSA 1, obteniendo: 1 ⊢ C p A p p

El axioma dice que:

⊢ C A p p p

Podemos aplicar la R 2

$$\frac{\vdash C\ P\ Q \qquad \vdash C\ Q\ M}{\vdash C\ P\ M}$$

al resultado 1, y al axioma 1 con $P \doteq p$, $Q \doteq A\ p\ p$, $R \doteq p$,

obteniéndose: 2 ⊢C p p

A continuación se aplica la definición D 1, que asegura que $C\ p\ p \doteq A\ N\ p\ p$, y aplicando la RR, obtenemos el teorema ⊢ A N p p

indica el final de la demostración.

Observación

Hemos enumerado los resultados de las etapas, para así poder referirlos si los necesitamos. Ej: Teo. A. 2 ⊢ C p p.

Teorema B: $\vdash A\ p\ N\ p$

Partimos del Ax 3

$\vdash C\ A\ p\ q\ A\ q\ p$

P/Np, q/p Ax 3; RSA 1

1 $\vdash C\ A\ N\ p\ p\ A\ p\ N\ p$

T 1; R 1 1, T1

2 $\vdash A\ p\ N\ p$

Teorema C: $\vdash C\ p\ N\ N\ p$

Partimos del T 2

$\vdash A\ p\ N\ p$

P/Np T 2; RSA 1

1 $\vdash A\ N\ p\ N\ N\ p$

D 1, 1; RR

$\vdash C\ p\ N\ N\ p$

INTERPRETACION METALOGICA

Sean "p", "q" ... nombres de proposiciones.
Una proposición puede ser verdadera o falsa. Asociaremos con una proposición verdadera el símbolo 1, y con una proposición falsa el símbolo 0.

Además definiremos los conectivos por las tablas siguientes:

A	1	0	K	1	0	C	1	0	E	1	0	N	
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1

o sea, A 10 = 1, K 10 = 0, C 10 = 0, E 10 = 0

Examinemos los axiomas:

A x 1 $\vdash$ C A p p p, pero p puede ser verdadero o falso.

a) C A 1 1 1 = C 1 1 = 1

b) C A 0 0 0 = C 0 0 = 1

A x 2 $\vdash$ C p A p q

a) C 1 A 1 q

C 1 A 1 1 = C 1 1 = 1

C 1 A 1 0 = C 1 1 = 1

b) C 0 A 0 q

C 0 A 0 1 = C 0 1 = 1

C 0 A 0 0 = C 0 0 = 1

A x 3 $\vdash$ C A p q A q p

a) C A 1 q A k 1

C A 1 1 A 1 1 = C 1 1 = 1

C A 1 0 A 0 1 = C 1 1 = 1

b) C A 0 q A q 0

C A 0 1 A 1 0 = C 1 1 = 1

C A 0 0 A 0 0 = C 0 0 = 1

DEF: Una expresión que para todas las combinaciones posibles da 1, se llama tautología.

Metateorema 1: Todas las expresiones decidibles o aceptables son tautologías.

Demostración: Es suficiente demostrar que los axiomas son tautológicos y que las reglas de deducción dan siempre tautologías.

Ej: R1 $\dfrac{\vdash P \quad \vdash C\ P\ Q}{\vdash Q}$

C P Q

1 1 1, Q debe ser necesariamente 1, por definición de la tabla de "C" (Si Q fuera 0, C 10 sería 0).

Observación 1:

Esta interpretación se refiere a símbolos de la primera fila y a los axiomas y reglas en que aparezcan implicados dichos símbolos.

- a x, no puede interpretarse como proposición, pues no es ni verdadera ni falsa.

- π a x, Σ x a x, son proposiciones.

Observación 2:

Es posible demostrar el inverso del metateorema anterior.

LISTA DE TEOREMAS QUE SE USARAN:

1 $\vdash$ E K p p p

2 $\vdash$ E A p p p

3 $\vdash$ C p A p A q m

4 $\vdash$ C C p C q m C q C p m

5 $\vdash$ C C p C q m C K p q m

6 $\vdash$ E K p A q m A K p q K p m

7 $\vdash$ E A p K q m K A p q A p m

8 $\vdash$ C K C p q C m r C A m p A r q

9 $\vdash$ E π x K a x b x K π x a x π x b x

10 $\vdash$ E π x π y K a x b y K π x a x π y a y

Capítulo Segundo

IDENTIDAD

Introduzcamos un nuevo símbolo "I" y su negación "N I". Las reglas de formación para este símbolo serán las siguientes:

1.— El símbolo I tiene que ser seguido por dos y no más que dos símbolos elementales de la tercera fila.
Así: I x y, I x z, son nuevas expresiones bien formadas.

2.— En una expresión bien formada se permiten sustituir los símbolos de la segunda fila por símbolos formados de un I seguido por un símbolo de la tercera fila. Ej: a / I x.

Aceptaremos los axiomas siguientes:

Ax. 7.— $\vdash \pi\, x\, I\, x\, x$

Ax. 8.— $\vdash \pi\, x\, \pi\, y\, C\, I\, x\, y\, C\, a\, y\, a\, x$

NUEVA REGLA DE SUSTITUCION

RSA 4 será de tipo $\dfrac{\vdash B\ y}{\vdash I\ x\ y}$

UNA INTERPRETACION

El símbolo I puede ser interpretado como "es idéntico a" y el símbolo N I como "es diferente de".

Así I x y significa "x es idéntico a y".

TEOREMAS

T. 1.— $\vdash \pi\ x\ \pi\ y\ E\ I\ x\ y\ I\ y\ x$

(i) Primero demostraremos $\vdash C\ I\ x\ y\ I\ y\ x$

Ax. 8		$\vdash \pi\ x\ \pi\ y\ C\ I\ x\ y\ C\ a\ y\ a\ x$
R 3	1	$\vdash C\ I\ x\ y\ C\ a\ y\ a\ x$
RSA 4 a/I z, 1	2	$\vdash C\ I\ x\ y\ C\ I\ z\ y\ I\ z\ x$
RSA 3 z/y, 2	3	$\vdash C\ I\ x\ y\ C\ I\ y\ y\ I\ y\ x$

aplicando $\dfrac{\vdash C\ P\ C\ Q\ M}{\vdash C\ Q\ C\ P\ M, 3}$

	4	$\vdash C\ I\ y\ y\ C\ I\ x\ y\ C\ I\ x$
Ax. 7		$\vdash \pi\ x\ I\ x\ x$
x/y, Ax. 7	5	$\vdash \pi\ y\ I\ y\ y$
R'3, 6	6	$\vdash I\ y\ y$
R 1, 4,6	7	$\vdash C\ I\ x\ y\ I\ y\ x$

(ii) Demostraremos ahora $\vdash C\,I\,y\,x\,I\,x\,y$

RSA 3 x/y y/x en 7 8 $\vdash C\,I\,y\,x\,I\,x\,y$

93, 7,8 9 $\vdash E\,I\,x\,y\,I\,y\,x$

R 3, R 3 9 $\vdash \pi\,x\,\pi\,y\,E\,I\,x\,y\,I\,x$

Observación:

T 1, dice que la relación I es simétrica, ahora demostraremos que es transitiva.

T. 2.– $\vdash \pi\,x\,\pi\,y\,\pi\,z\,C\,K\,I\,x\,y\,I\,y\,z\,I\,x\,z.$

Ax. 8 $\vdash \pi\,x\,\pi\,y\,C\,I\,x\,y\,C\,a\,y\,a\,x$

R'3, Ax. 8 1 $\vdash C\,I\,x\,y\,C\,a\,y\,a\,x$

a/Iz, 1 2 $\vdash C\,I\,x\,y\,C\,I\,z\,y\,I\,z\,x$

(T 1, 9) RR 3 $\vdash C\,I\,x\,y\,C\,I\,y\,z\,I\,z\,x$

aplicando $\vdash C\,p\,C\,q\,m$

$\vdash C\,K\,p\,q\,m$ 4 $\vdash C\,K\,I\,x\,y\,I\,y\,z\,I\,z\,x$

R 3, R 3, R 3. $\vdash \pi\,x\,\pi\,y\,\pi\,z\,C\,K\,I\,x\,y\,I\,y\,z\,I\,x\,z.$

T. 3.– $C\,\pi\,x\,\pi\,y\,I\,x\,y\,I\,x\,y.$

Ax. 5 $\vdash C\,\pi\,x\,a\,x\,a\,y$

y/z; x/y RSA 2. 1 $\vdash C\,\pi\,y\,a\,y\,a\,z$

a/Ix RSA 4. 2 $\vdash C\,\pi\,y\,I\,x\,y\,I\,x\,z$

E I x 2 I z x; RR 2. 3 $\vdash C\,\pi\,y\,I\,x\,y\,I\,z\,x$

R 6 4 $\vdash C\,\pi\,x\,\pi\,y\,I\,x\,y\,\pi\,x\,I\,z\,x$

Ax. 5		$\vdash C \pi x a x a y$
a/Iz Ax. 5	5	$\vdash C \pi x I z x I z y$
4,5 R 2.	6	$\vdash C \pi x \pi y I x y I z y$
z/x		$\vdash C \pi x \pi y I x y I x y$

T. 4.– $\vdash C \pi x \pi y I x y \Sigma x \pi y I x y$

T. 5.– $\vdash C \pi x \pi y I x y I x y$

$\vdash C P A y$

$\vdash C P \pi y A y$	1	$\vdash C \pi x \pi y I x y \pi y I x y$

$\vdash C A x P$

$\vdash C \Sigma x A x p$ $\vdash C \pi x \pi y I x y \Sigma x \pi y I x y$

T. 5.– $\vdash C \pi x I x y \pi z I y z$

Ax. 5		$\vdash C \pi x a x a y$
a/Iz RSA 4.	1	$\vdash C \pi x I z x I z y$
R 6	2	$\vdash C \pi x I z x \pi y I z y$
RR T 1.	3	$\vdash C \pi x I x z \pi y I z y$
z/y, y/z RSA 3.		$\vdash C \pi x I x y \pi z I y z$

T. 6.– $\vdash C \pi z I y z \pi x I x z.$

T. 5, 2 $\vdash C \pi x I z x \pi y I z y$

x/z, z/y, y/x RSA 3 1 ⊢ C π z I y z π x I y x

RR; T. 1 ⊢ C π z I y z π x I x y

T. 7.– ⊢ E π x I x y π z I y z

T 6, T 5, D 3.

Teorema 8.– ⊢ C Σ x π y I x y π x π y I x y.

T. 2 ⊢ π x π y π z C K I x y I y z I x z

R'3, R'3, R'3. 1 ⊢ C K I x y I y z I x z

R 6, R 6; 2 ⊢ C π x π z K I x y I y z π x π z

π x π y K B x D y

K π x B x π y D y 3 ⊢ C K π x I x y π z I y z π x π z I x z

RR, T. 7 4 ⊢ C K π x I x y π x I x y π x π z I x z

E K p p p RR 5 ⊢ C π x I x y π x π z I x z

R 7 ⊢ C Σ y π x I x y π x π z I x z

Teorema 9.– ⊢ π y Σ x I y x

Ax. 6 ⊢ C a y x a x

a/I z RSA 4. 1 ⊢ C I z y I x I z x

z/y RSA 3. 2 ⊢ C I y y x I y x

Ax. 7, R'3 3 ⊢ I x x

x/y RSA 3	4	$\vdash$ I y y
R 1 2,4		$\vdash$ Σ x I y x
R 3		$\vdash$ π y Σ x I y x

Observación:

El teorema 9 puede interpretarse como: "para todo y , existe por lo menos un x, tal que y es idéntico a x".

Teorema 10.— $\vdash$ C π x π y I x y π x π y π z A I x y A I x z I y z

		$\vdash$ C p A p A q m
p/Ixy, q/I x z, n/I y z	1	$\vdash$ C I x y A I x y a I x z I y z
R 4	2	$\vdash$ C I x y π z A I x y A I x z I y z
R 6		$\vdash$ C π x π y π z A I x y A I x y A I x z I y z.

Teorema 11.— $\vdash$ C π x π y π z A I x y I x z π x π y I x y

		$\vdash$ C π y π Z A a y a z A π y a y π z a z
a/I x RSA 4	1	$\vdash$ C π y π z A I x y I x z A π y I x y π z I x z
T. 7		$\vdash$ π x I x y π z I y z
x/y y/x RSA 3	2	$\vdash$ E π y I y x π z I x z
RR, T 1	3	$\vdash$ E π y I x y π z I x z

RR, 3 aplicando en 1	4	$\vdash C \pi y \pi z A I x y I x z A \pi y I x y \pi y I x y$
E A p p p; RR	5	$\vdash C \pi y \pi z A I x y I x z \pi y I x y$
R 6		$\vdash C \pi x \pi y \pi z A I x y I x z \pi x \pi y I x y$

Teorema 12.— $\vdash C \pi x \pi y I x y \pi x \pi y \pi z A I x y I x z$

Ax. 2		$\vdash C p A p q$
p/ I x y, q/ I y z	1	$\vdash C I x y A I x y I x z$
R 4	2	$C I x y \pi z A I x y I x z$
R 6, R 6		$C \pi x \pi y I x y \pi x \pi y \pi z A I x y I x z$

Capítulo Tercero

EXPRESIONES ADVERBIALES DE CANTIDAD

DEFINICIONES PREVIAS

DOMINIO: Consideremos un conjunto enumerable D no vacío, y permitamos sustituir símbolos de la tercera fila por elementos del conjunto (con las restricciones comunes). El conjunto D se llama un *dominio de las expresiones* bien formadas.

Def.: En un dominio finito: $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots\ldots\}$

$\pi x\ ax \doteq K\ a\ \alpha_1\ K\ a\ \alpha_2\ K\ a\ \alpha_3 \ldots\ldots K\ a\ \alpha_n{}^{-1},\ a\ \alpha_n$

$\Sigma x\ ax \doteq A\ a\ \alpha_1\ A\ a\ \alpha_2\ A\ a\ \alpha_3 \ldots\ldots A\ a\ \alpha_n{}^{-1}\ a\ \alpha_n$

VALIDEZ DE UNA EXPRESION BIEN FORMADA

Asociamos a cada nueva expresión elemental obtenida por sustitución de un elemento del dominio, un 1 ó un 0 (símbolos nuevos no necesariamente los números naturales 0 y 1).

Ej.: $D = \{ \alpha_1 \ \beta \}$

a α ——> 1

a β ——> 0

K a α a β ——> K 1 0

Definamos las transformaciones correspondientes a los conectivos

E	1	0	C	1	0	K	1	0	A	1	0	N	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	

Ej.: C 1 1 ——> 1 K 1 0 ——> 0

E 1 0 ——> 0 N 1 ——> 0

Se dice que una *expresión* es válida en un dominio dado D, si para cualquier sustitución posible por elementos del dominio D, a la expresión resultante está asociado el 1.

Ej.: Consideremos el dominio $D = \{ \alpha, \beta \}$, y a la expresión πxAax Nax. Ya que πx Aax Nax $\doteq$ K A a α N a α A a β N a β

Asociemos 0 ó 1 de todas las maneras siguientes:

K A 1 N 1 A 1 N 1 –> K A 1 0 A 1 0 –> K 1 1 –> 1
K A 1 N 1 A 0 N 0 –> K A 1 0 A 0 1 –> K 1 1 –> 1
K A 0 N 0 A 1 N 1 –> K A 0 1 A 1 0 –> K 1 1 –> 1
K A 0 N 0 A 0 N 0 –> K A 0 1 A 0 1 –> K 1 1 –> 1

Se ve que para cada sustitución posible la expresión πx A ax N ax da 1.

Una expresión se dice *universalmente válida,* si es válida en todos los dominios posibles.

Una expresión es *verificable* en un dominio D, si existe por lo menos una sustitución a la cual está asociado 1.

Una expresión es *universalmente verificable*, si es verificable en todos los dominios posibles.

Una expresión se llama *contradictoria* en un dominio D, si a todas las sustituciones posibles está asociado el 0.

En la Gramática castellana a las formas lingüísticas " a lo más" y "por lo menos" se las llama locuciones adverbiales de cantidad. Nosotros llamaremos expresiones adverbiales de cantidad a expresiones lógicas válidas en dominios de *a lo más* n elementos, o en dominios de *por lo menos* n elementos.

Con la ayuda del símbolo I, anteriormente introducido, podremos definir dicho tipo de expresiones.

Supondremos que a I α β se le asigna el 1, si $\alpha = \beta$ y 0, si $\alpha \neq \beta$.

EXPRESIONES ADVERBIALES CON "A LO MAS".

Con esta definición, la expresión siguiente es válida en cualquier dominio que tenga a lo más n elementos:

$$\pi\ x_1\ \pi\ x_2 \ldots \pi\ x_{n+1}\ A\ I\ x_1\ x_2\ A\ I\ x_1\ x_3\ A\ I\ x_n\ x_{n+1}\ I\ x_n\ x_{n+1}$$

Las sucesiones con A son selecciones o combinaciones de los "n+1" x_i tomados de dos a dos. Luego habrá:

$$C_2^{n+1} = \frac{n\ (n+1)}{2}$$

expresiones elementales del tipo I x_i x_j i $\neq$ j.

Ej.: (1) π x π y I x y es una expresión válida en un dominio con a lo más un elemento.

(2) π x π y π z A I x y A y x z I y z, es una expresión válida en un dominio con a lo más dos elementos.

Se puede hacer una correspondencia entre las expresiones adverbiales de cantidad anteriormente definidas, y los números naturales, de la manera siguiente: a la expresión adverbial que es válida en un dominio que tiene a lo más n elementos, asociamos

el natural n. Esta correspondencia es evidentemente 1 a 1, o sea, a dos expresiones distintas corresponden dos números distintos. A la expresión asociada con el número n, la denotaremos por e_n.

Sean k, n, números naturales, y e_k, e_1 las expresiones adverbiales de cantidad respectivas, definiremos correspondencia para A, K, C.

$$\begin{array}{lll} A\ e_k\ e_1 & \longleftrightarrow & \text{máx. } \lfloor k, 1 \rfloor \\ K\ e_k\ e_1 & \longleftrightarrow & \text{mín. } \lfloor k, 1 \rfloor \\ C\ e_k\ e_1 & \longleftrightarrow & k \leqq 1 \end{array}$$

METATEOREMA

Las expresiones adverbiales de "a lo más" forman un conjunto reticulado (lattice).

Se dice que un conjunto L es reticulado, si está definido en este conjunto dos relaciones "$\leqq$" y "$=$" por los axiomas siguientes: a, b, c (- L

Ax. 1.– π a	$a = a$
Ax. 2.– π a π b	C ($a = b$) ($b = a$)
Ax. 3.– π a π b V c	CK ($a = b$) ($b = c$) ($a = c$)
Ax. 4.– π a π b	EK ($a \leqq b$) ($b \leqq a$) ($a = b$)
Ax. 5.– π a π b V c	CK ($a \leqq b$) ($b \leqq c$) ($a \leqq c$)

y además dos operaciones que suelen simbolizarse con U, $\frown$ satisfaciendo los axiomas siguientes:

L 1.– $aUa = a$	L 1'.– $a \frown a = a$
L 2.– $(aUb)Uc = aU(bUc)$	L 2'.– $(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c)$
L 3.– $aU(ab) = a$	L 3'.– $a \frown (a\ U\ b) = a$

Para demostrar este metateorema, hagamos la siguiente correspondencia:

$$e_k \longleftrightarrow a \qquad\qquad e_1 \longleftrightarrow b$$

$$E\ e_k\ e_1 \quad <\!\!\longrightarrow\!\!> \quad a = b$$
$$C\ e_k\ e_1 \quad <\!\!\longrightarrow\!\!> \quad a \leqq b$$
$$K\ e_k\ e_1 \quad <\!\!\longrightarrow\!\!> \quad a \frown b$$
$$A\ e_k\ e_1 \quad <\!\!\longrightarrow\!\!> \quad a\ U\ b$$

Con esta correspondencia e interpretación, la demostración es inmediata ya que "E" tiene las propiedades exigidas en 1, 2, 3.

Los axiomas 4, 5, también se transforman en teoremas de lógica. Igualmente los axiomas 6, 7, 8, también son teoremas de la lógica. Siendo teoremas de la lógica, y como e_k, e_e, ... son expresiones bien formadas pueden substituir a p, q, r, ..., etc.

EXPRESIONES ADVERBIALES CON "*A LO MENOS*"

En forma semejante con las expresiones adverbiales con "a lo más" podemos formar expresiones adverbiales con "a lo menos". Se puede ver que la negación de una expresión adverbial con "a lo más n-1" es una expresión adverbial con "a los menos n". Así por ejemplo: la expresión adverbial a lo más uno es $\pi\ x\ \pi\ y\ I\ x\ y$ y su negación será $N\ \pi\ x\ \pi\ y\ I\ x\ y$, que corresponderá a la expresión adverbial a lo menos dos elementos.

Además $E\ N\ \pi\ x\ \pi\ y\ I\ x\ y\ \Sigma\ x\ \Sigma\ y\ N\ I\ x\ y$, luego para definir las expresiones adverbiales por lo menos n; en la forma siguiente:

$$\Sigma\ x_1\ \Sigma\ x_2\ \ldots\ \Sigma\ x_{n+1}\ N\ A\ I\ x_1\ x_2\ A\ I\ x_1\ x_3\ \ldots$$
$$\ldots\ A\ I\ x_{n-2}\ x_{n-1}\ A\ I\ x_{n-2}\ x_n\ I\ x_{n-1}\ x_n$$

Será una expresión válida en cualquier dominio con a lo menos n elementos.

METATEOREMA 3

Las expresiones adverbiales con "a lo menos n" forman un conjunto reticulado.

Demostración:

Hacemos una correspondencia entre las expresiones "por lo menos n", con los números enteros negativos. A una expresión "por lo menos n+1 asociamos −n.

Ej.: Σ x Σ y I N I x y <————> −1

Simbolicemos con $\bar{e}_n$ la expresión "por lo menos n + l", y hagamos las siguientes correspondencias:

$\bar{e}_n$ <————> − 1

K $\bar{e}_k$ $\bar{e}_1$ <————> min. ⌊− k, − 1⌋

A $\bar{e}_k$ $\bar{e}_1$ <————> max. ⌊− k, − 1⌋

C $\bar{e}_k$ $\bar{e}_1$ <————> − k ≧ − 1

E $\bar{e}_k$ $\bar{e}_1$ <————> − k = − 1

Se demuestra que un conjunto reticulado puede definirse también como un conjunto parcialmente ordenado, tal que dos elementos cualesquiera de él tengan un máximo (cota superior estricta) y un mínimo (cota superior estricta). Una ligera reflexión muestra que esta definición también se verifica en este caso.

Consideremos el conjunto de todas las expresiones adverbiales, ya sean del tipo "a lo menos" o del tipo "a lo más" podemos enunciar para estas expresiones el siguiente metateorema:

METATEOREMA 4

El conjunto de las expresiones adverbiales de cantidad forma un álgebra de Boole.

Un álgebra de Boole es un conjunto reticulado distributivo, complementado, con dos elementos fijos 0 y 1.

Esto significa agregar los siguientes axiomas:

A D 1 π a π b π c a $\frown$ (b U c) = (a $\frown$ b) U (a $\frown$ c)
A D 2 π a π a π c a U (b $\frown$ c) = (a U b) $\frown$ (a U c)

Denotaremos complemento de a, por a', y lo introduciremos con los siguientes axiomas:

A C I π a Σ a' a U a' = 1
A C 2 π a Σ a' a $\frown$ a' = 0

Demostración:

Las expresiones adverbiales forman un álgebra de Boole. Para demostrarlo, es necesario introducir dos expresiones nuevas: e_u, que es la expresión universalmente válida; e_0 que es la expresión universalmente contradictoria, y hacer las correspondencias siguientes:

a <——> e_k b <——> e_1
a' <——> N e_k b' <——> N e_1

El resto de la demostración es semejante. (Observando que las leyes de la distributividad son válidas en la lógica;

E K p A q m A K p q K p m y
E A p K q m K A p q A p m).

INTERPRETACION VECTORIAL DE LAS EXPRESIONES DE CANTIDAD

Interpretemos e_k como un vector con "k" unos y el resto "0", de la forma siguiente:

e_k <——> [1, 1, 1, ... 1, 0, 0, 0, ...]

En total, habrá un número infinito enumerable de columnas.

Se interpreta un 1 en la n - ésima columna, como que la expresión es válida en un dominio con n elementos. Un "0" en el lugar n, significará que la expresión es contradictoria en un dominio de "n" elementos.

Así e_1 <——> [1, 0, 0, ... 0]
e_2 <——> [1, 1, 0, 0, ... 0]

La negación de e_k, será interpretada por un vector con "K" ceros y el resto 1, o sea, N e_k = 0, 0, 0, ... 0, 1, 1, 1, ... 1
además: e_u <——> [1, 1, 1, ... 1] y,
e_0 <——> [0,0,0, 0, ... 0]

K e_l será representado por un vector obtenido aplicando la operación k entre los elementos correspondientes de los dos vectores, según las reglas siguientes:

K 11 = 1 K 10 = 0 K 01 = 0 K 00 = 0

A e_l igual, pero con

A 11 = 1 A 10 = 1 A 01 = 1 A 00 = 0

C e_k e_l igual, pero con

C 11 = 1 C 10 = 0 C 01 = 1 C 00 = 1

E e_k e_r, igual, pero con

E 11 = 1 E 10 = 0 E 01 = 0 E 00 = 1

N e_k, con N 0 = 1 N 1 = 0

Esta interpretación nos da un método de decisión para expresiones adverbiales.

Definición de expresiones válidas en dominios de exactamente n elementos:

Introduzcamos un nuevo conectivo T, con la operación asociada definida por T 11 = 0 T 10 = 1 T 01 = 1

T 00 = 0. Entonces T e_{k-1} e_k definirá una expresión válida en un dominio de exactamente k elementos.

T e_{k-1} e_k corresponde a la suma de vectores, en aritmética módulo 2, cuya suma está definida por:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Así la expresión válida en un dominio de exactamente tres elementos será: T e_2 e_3, o sea en vectores.

$$[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ldots]+[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots] = [1+1,\ 1+1,\ 0+1,\ 0+0,\ 0+0,\ 0+0,\ \ldots] = [0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots]$$

EXPRESIONES ADVERBIALES DE CANTIDAD CON PREDICADO

Una expresión del tipo:

(1) $\pi\ x_1\ \pi\ x_2\ \ldots\ \pi\ x_{n1}\ C\ K\ a\ x_1\ K\ a\ x_2\ K\ a\ x_3\ \ldots\ K\ a\ x_n\ a\ x_n{}_{+1}$

$A\ I\ x_1\ x_2\ A\ I\ x_1\ x_3\ \ldots\ A\ x_n\ x_{n+1}.$

puede interpretarse como "a lo más n elementos son a", no importando cuál es el número total de elementos del dominio.

En dominios que contengan "n" o menos que "n" elementos, la expresión (1) será una expresión válida. En dominios con más de n elementos la expresión será válida si a lo más n elementos son a.

Así por ejemplo, la expresión:

(2) π x π y C K a x a y I x y, será interpretada como "a lo más un elemento es a".

En el caso de un dominio de un solo elemento (2) es una expresión válida. En dominios con un número mayor de elementos, será válida si "a lo más hay un elemento que es a".

La negación de la expresión de "a lo más n son a" es "por lo menos n+1 son a".

La negación de la expresión (2) será, por lo tanto, "por lo menos dos elementos son a". Si el dominio contiene "n" o menos que "n" elementos, entonces la expresión negación de (1) es contradictoria. Si el dominio contiene "n+1" o más elementos, entonces la expresión "por lo menos n+1 son a" será válida si hay por lo menos "n+1" elementos en el dominio.

Para abreviar escribiremos:

a e_n, para indicar que "a lo más n elementos son a". Así a e_1 será interpretado como: "a lo más un elemento es a".

Observación

Esta expresión no es separable, esto es no tiene sentido *a* sola. *N a* e_n, será la negación de "a lo más n elementos son a", o sea, "por lo menos n 1 son a".

También podría tenerse:

(Na)e_n, que significaría, "a lo más n son no a". Esta expresión podría confundirse con la anterior, por lo que es conveniente escribirla en otra forma.

Una breve reflexión muestra que en un dominio de n elementos E (Na)e_p a e_{n-p} si n p, por lo que usaremos siempre a e_{n-p} en vez de (Na) e_p, en estos casos.

Cuando n = p, se tiene que: (Na)e_p es válida.

Cuando n p, se tiene que: (Na)e_p es también válida.

Se pueden formar nuevas expresiones combinando las expresiones adverbiales con los conectivos. Así se puede considerar A a e_n a r_k C a e_k e_n, etc.

Simbolizaremos una expresión de este tipo por: Q (a e_k).

METATEOREMA

Una expresión del tipo: Q (a e_k) es una expresión universalmente válida si la expresión Q (e_k) es una expresión universalmente válida.

LEMA 1: Todas las expresiones universalmente válidas del tipo Q (e_k) pueden ser escritas como:

C L (e_m) Q (e_n).

LEMA 2: Se demuestra en la lógica la siguiente regla:

$$\frac{\vdash C\ P\ Q \qquad \vdash C\ M\ R}{\vdash C\ A\ M\ P\ A\ R\ a}$$

O sea, si $\vdash C\ P\ Q$ y $\vdash C\ M\ R$ son expresiones aceptadas entonces $\vdash C\ A\ M\ P\ A\ R\ Q$ también es una expresión aceptada.

Ahora sustituyamos en lugar de P una expresión e_m y en lugar de Q una expresión e_n y en lugar de M una serie de A N a_1 x_1 A N a x_2... a x_{m+1} y en lugar de R:
A N a x_1 A N A x_2 a x_{n+1}, pero se sabe que C e_m e_n es universalmente válida si $m \leq n$. $\vdash C\ M\ R$ será también válida si $m \leq n$ ya que la expresión C A p_1 A p_2 .. P_m A p_1 ... P_n es válida si $m \leq n$.

Después de sustituir aplicamos la definición de:
C p q $\doteq$ A N p q, y además aplicando la regla de:

$$\frac{\vdash C\ B\ x\ D\ x}{\vdash \pi\ x\ B\ \pi\ x\ D\ x}$$

queda demostrado el teorema.

UN METODO DE DECISION NO ALGORITMICO PARA EL CALCULO DE PROPOSICIONES

Usando las expresiones adverbiales se puede dar un método de decisión no algorítmico para el cálculo de proposiciones.

Llamaremos cálculo de proposiciones el sistema construido con los símbolos de la primera fila y los cinco primeros axiomas y con las reglas sin los símbolos de la segunda y tercera filas.

Consideremos una expresión bien formada que contiene únicamente símbolos de la primera fila. Simbolizaremos estas expresiones por Q (p, q, m ...).

Sustituyamos p, q, m... por expresiones adverbiales, o sea, e_k e_m, etc. Como esta sustitución es aceptable según nuestras reglas, si Q (p, q, m, ...) es una expresión aceptable Q (e_k e_m) va a ser también aceptable.

La sustitución inversa no es permitida, así es posible que una expresión Q (e_m e_k) sea una expresión aceptada, pero, Q (p, q) no lo es. Así por ejemplo: C e_2 e_3 es una expresión aceptada pero C p q no lo es.

La condición necesaria y suficiente para que una expresión Q (p q m...) que contiene "n" símbolos diferentes sea aceptable es que Q (p, q, m ..) sea aceptable para todas las sustituciones de "n" expresiones adverbiales, por Ej.: e_1.....e_n. Como la sustitución de tipo C e_k e_m va a ser verdadera si $k \leq m$, es suficiente hacer la sustitución de tal manera que se sustituya el antecedente por la expresión adverbial de mayor índice.

Algunos ejemplos

Sea nuestro problema decidir si:

C K p q p es una expresión aceptable o no.

Se sustituye p/e_1 q/e_2

C K e_1 e_2 e_1 = C e_1 e_1 = 1

C p A p q

C e_2 A e_1 e_2 = C e_2 e_2 = 1

DESCRIPCION DE OBJETOS SINGULARES

Como la expresión:

$\vdash \pi$ x π y C K a x a y I x y, expresa la condición que a lo más uno es "a" si se escribe:

K Σ x a x π x π y C K a x a y I x y, que dice que a lo más uno es "a" y existe por lo menos un "a" entonces la expresión K Σ x a x π x π y C K a x a y I x y dice que "a" es único.

Se puede generalizar esto escribiendo en abreviación K N a e_1 a e_2 que diría que hay dos únicas "a", etc.

BIBLIOGRAFIA

Curry, H. B.: (1) "Leçons de Logique algébrique". Paris Gauthier - Villars Louvain, E. Nauwelaerts. 1952.
(2) "Foundations of Mathematical Logic". Mc. Graw - Hill. 1963.

Curry, H. B. y R. Feys: "Combinatory Logic" Amsterdam 1958.

Dopp I.: "Leçons de Logique Formelle". Louvain 1950.

Hilbert, D. y W. Ackermann: "Grundzüge der theoretischen logik". Berlin - Göttingen - Heidelberg 1959.

Hilbert D. y P. Bernays: "Grundlagen der Mathematik" 2 Tomos, Berlin Springer I 1934. II 1939.

Lukasiewicz: "Formal Logic".

Nemesszeghy, E.: "L'identité et les descriptions des objets singuliers dans la logique mathématique". Tesis de doctorado, Université de Louvain. 1955.

Rosser, I. B.: "Logic for mathematicians". Mc Graw-Hill. 1953.

Scholz, H. y G. Hasenjaeger: "Grundzüge der mathematischen logik". Berlin - Göttingen - Heidelberg. 1961.

Whitehead, A. N. y B. Russell: "Principia Mathematica". Cambridge University Press. Tomo I, 1925. Tomo II, 1927.

Impreso en los Talleres de la Editorial Universidad Católica